



Bahnberechnung von Gasblasen in zähen Flüssigkeiten

Labor- und Forschungsprojekt

Martin Koske

Uwe Hahne

Übersicht

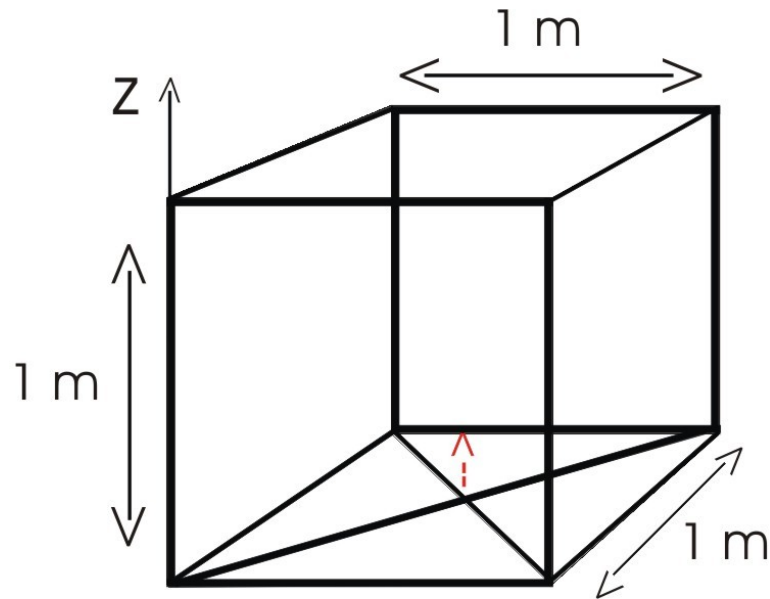
- Einleitung
- Videoverarbeitung und 3D Rekonstruktion
- Interpolationsansätze:
 - Bézier – Spline
 - Quaternionen
 - Differentialgeometrie und Schraubenlinie
- Implementation
- Vorführung der Software
- Ausblick

Einleitung

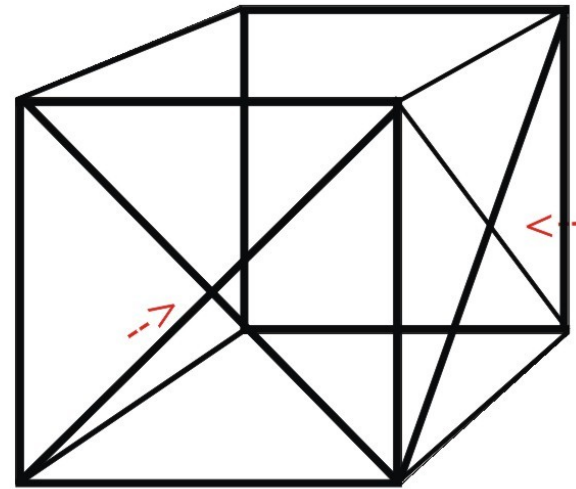
- Zusammenarbeit mit Marcel Schlönvoigt
- Idee: Optimierung der Ölreinigung
- Prinzip der Oberflächenvergrößerung
- Abschätzung der Bahnkurven der Gasblasen
- Forschungslabor in Mexiko
Universidad Autónoma Metropolitana
(Iztapalapa)

Einleitung

- Versuchsaufbau



Aufstieg der Blase

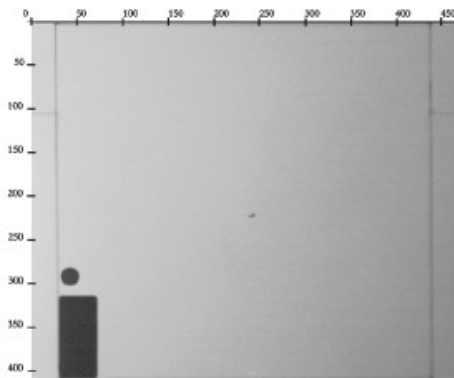


Kamerapositionen

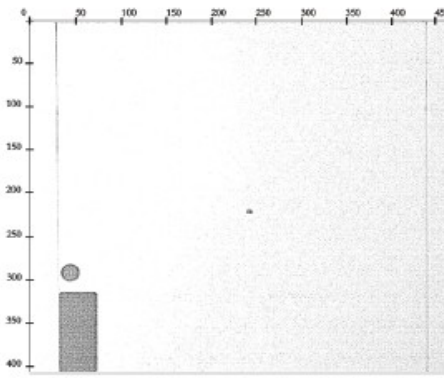
- Videoaufnahmen

Videoverarbeitung und 3D Rekonstruktion

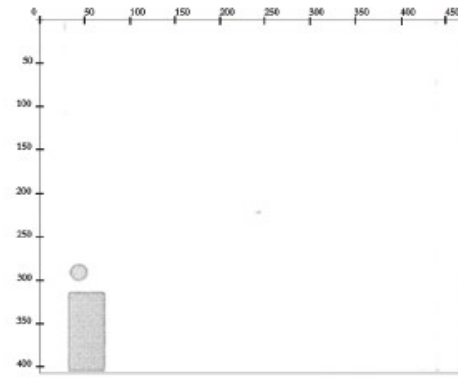
- Extrahieren der einzelnen Bilder
- Bildbearbeitung
 - Hintergrundreduktion
 - Abgrenzung des Blasenrandes



(a) Originalbild



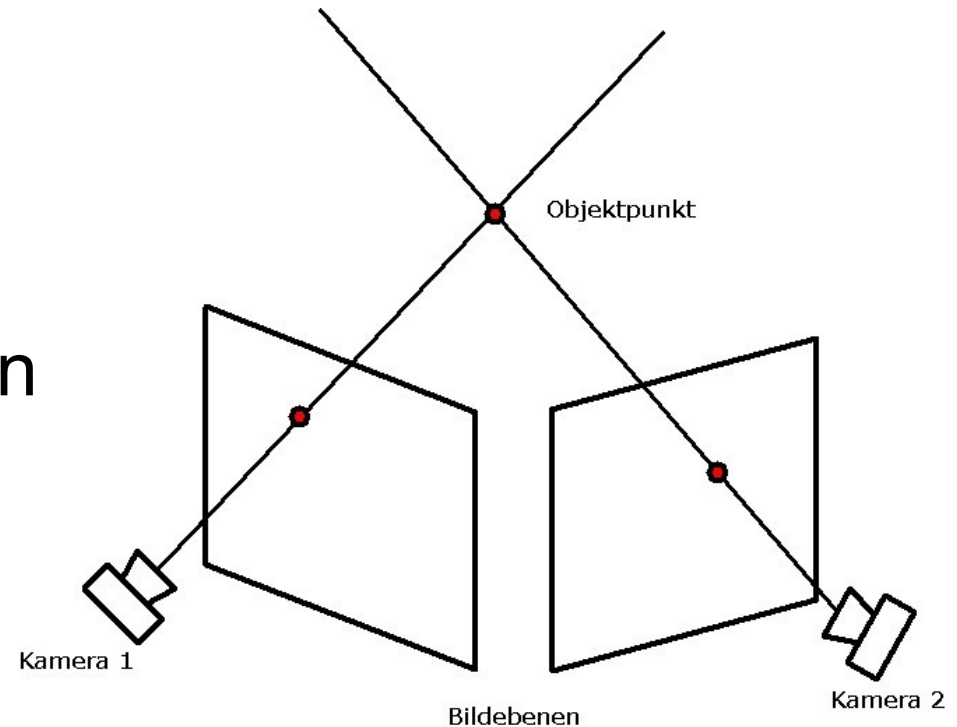
(b) Hochpassfilterung



(c) Tiefpassfilterung

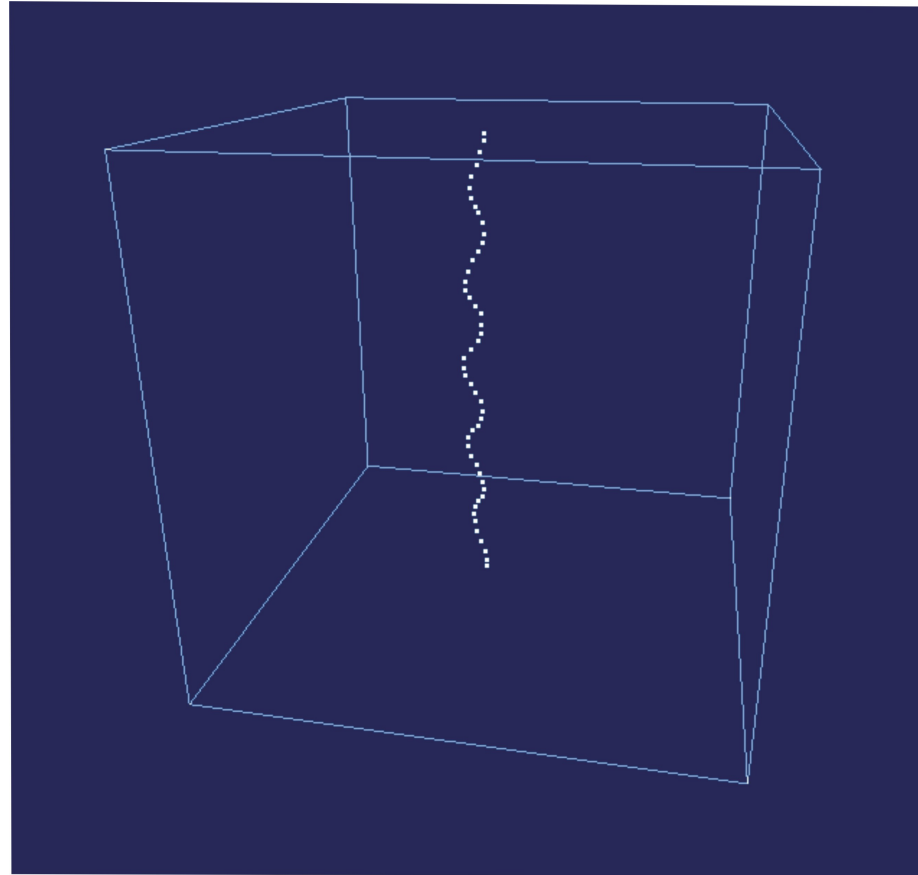
Videoverarbeitung und 3D Rekonstruktion

- Bildebene konstruieren
- Pixelposition der Gasblase in Bildebene bestimmen
- Gerade aus Kamera und Bildpunkt
- 3D Position aus Schnittpunkt



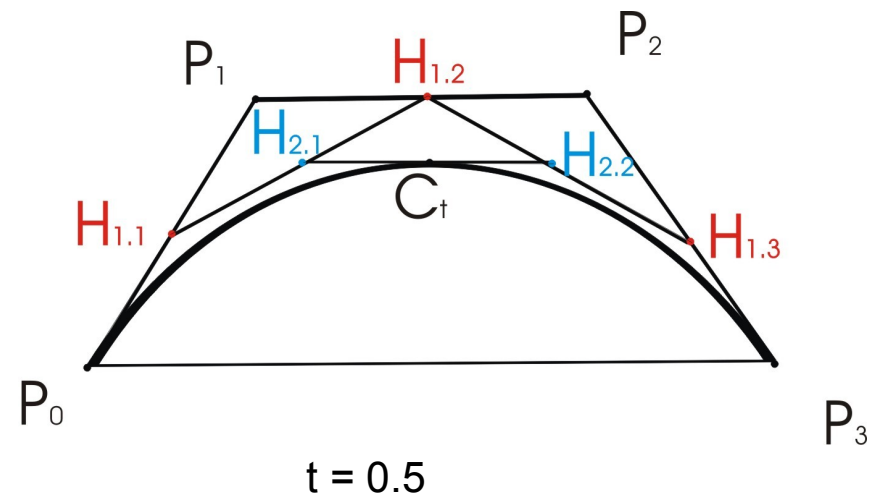
Videoverarbeitung und 3D Rekonstruktion

- Ergebnis



Interpolationsansätze: Bézier

- Pierre Bézier
(*1910 - †1999)
- Idee:
 - Karosserieentwicklung für Renault
 - Weiche Stromlinienformen mit glatten Übergängen
- Geometrische Konstruktion



Interpolationsansätze: Bézier

- Mathematischer Hintergrund:

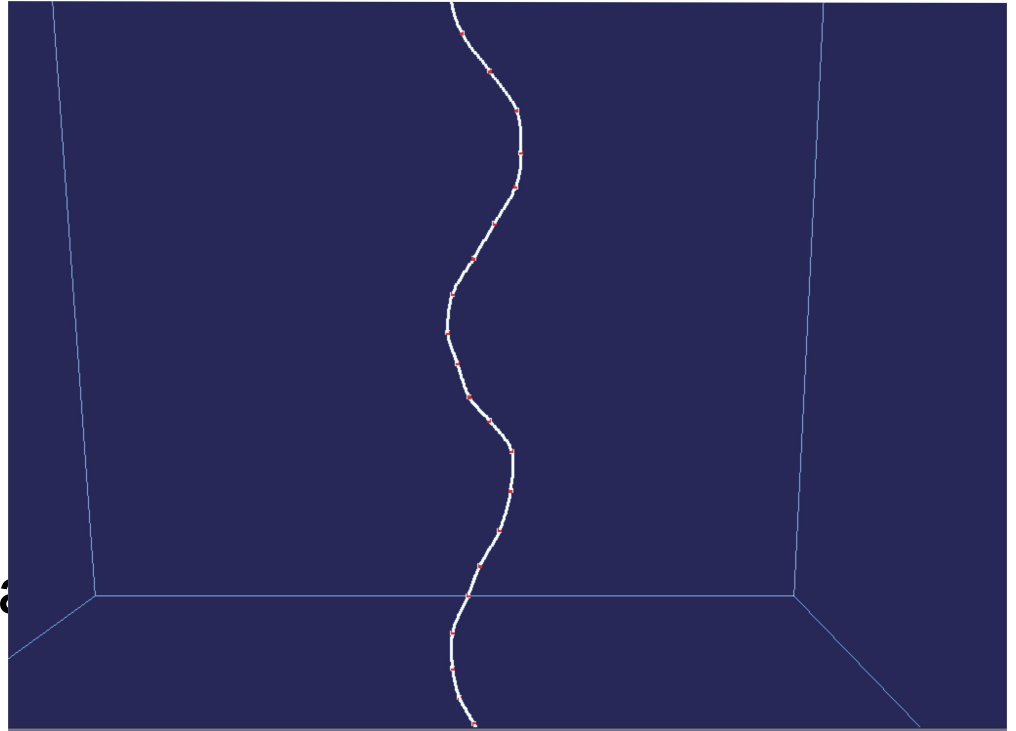
- Polynom 3. Grades mit 4 Stützstellen

$$b(t) = b_0 * (1 - t)^3 + b_1 * 3t * (1 - t)^2 + b_2 * 3t^2 * (1 - t) + b_3 * t^3$$

- n Punkte → n-1 Polynome
- Übergänge der Polynome: 1. Ableitung gleich
→ Stetige Gesamtkurve

Interpolationsansätze: Bézier

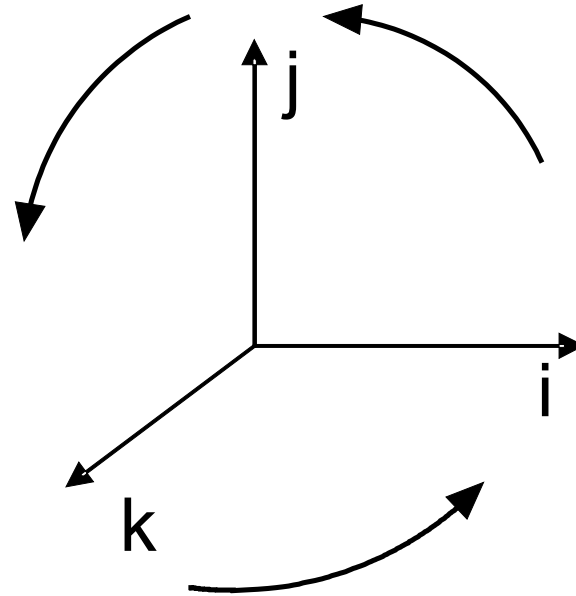
- Ergebnis:
- Nachteil:
 - Umständliche Beschreibung der Kurve
 - 50 Polynome 3. Grades



Interpolationsansätze: Quaternionen

- Grundlagen:
 - 4-Tupel
 - Realteil plus 3 imaginäre Teile
 - $q = a + bi + cj + dk$
 - i, j und k als imaginäre Einheiten
 - Es gilt:

*	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1



Interpolationsansätze: Quaternionen

- Berechnung von Rotationen mit Quaternionen
 - Die Rotation um einen beliebigen normierten Vektor (x, y, z) wird durch die Quaternion
$$q = (\cos(\varphi/2), x \cdot \sin(\varphi/2), y \cdot \sin(\varphi/2), z \cdot \sin(\varphi/2))$$
repräsentiert.
 - Tatsächlich repräsentiert jede Quaternion q mit $|q| = 1$ eine Rotation.
- Anwendungen:
 - Computergrafik:
 - Rotationen können einfacher und mit weniger Variablen ausgedrückt werden
 - Es kann zwischen Rotationen interpoliert werden
 - Ideal für Animationen

Interpolationsansätze: Quaternionen

- Sphärische lineare Interpolation (SLERP)
- Nützlich für uns um Rotation zwischen den Stützstellen zu interpolieren
- Aber: Winkelgeschwindigkeiten sind nicht konstant → unstetige Übergänge
- Kann man mit Hilfe kubischer Splines umgehen, aber die sphärische Entsprechung ist notwendig → viel komplexer als Bézier-Splines im euklidischen 3D-Raum

Interpolationsansätze: Differentialgeometrie

- Parameterdarstellung
 - $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$
 - Bedingung:
 - $P'(t) \neq (0, 0, 0)$
 - $P''(t)$ und $P'''(t)$ müssen existieren
 - liegt in diskreter Form vor
 - aber: unkonstante Bahngeschwindigkeit

Interpolationsansätze: Differentialgeometrie

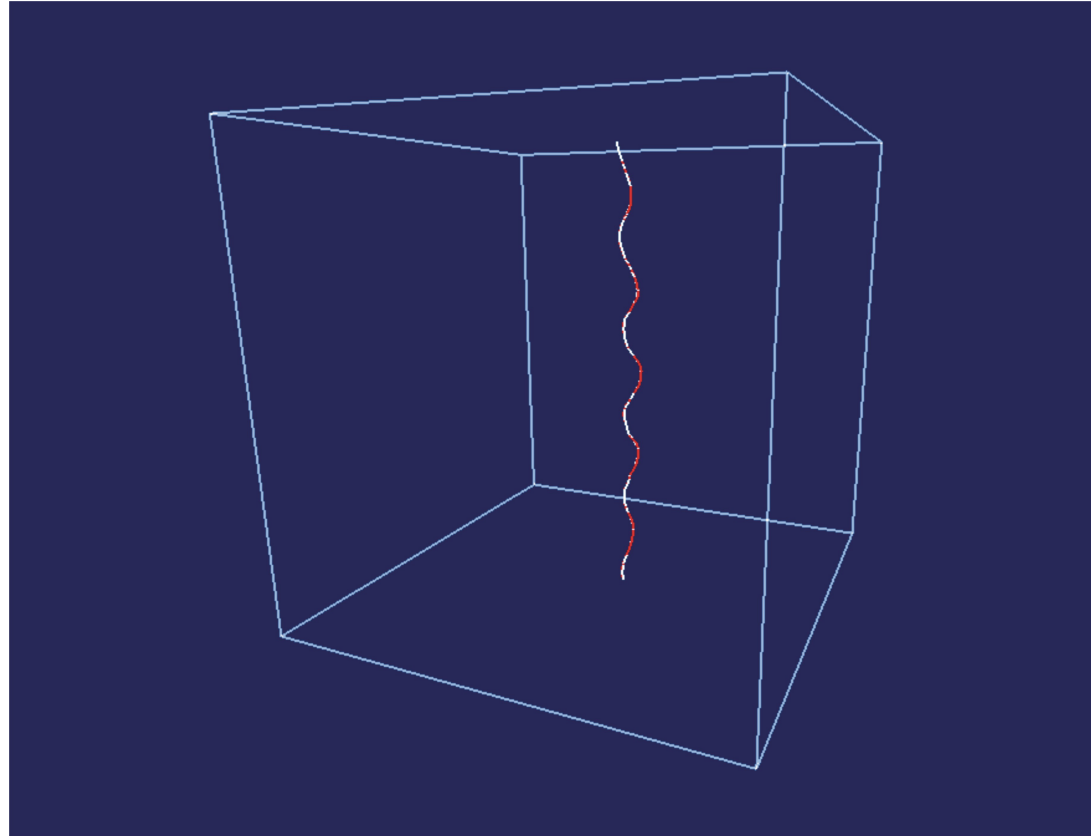
- Transformation in Bogenlänge
- Unterteilung in Teilstücke
 - Längenberechnung über Integral

$$L = \int_{t_0}^{t_n} \left| \dot{\vec{r}}(t) \right| dt$$

- Es entsteht ein Fehler durch die Differentiation, der durch die Integration wieder geglättet wird
- Im diskreten Fall müssen die gleichmäßigen Stützstellen interpoliert werden → Bézier

Interpolationsansätze: Differentialgeometrie

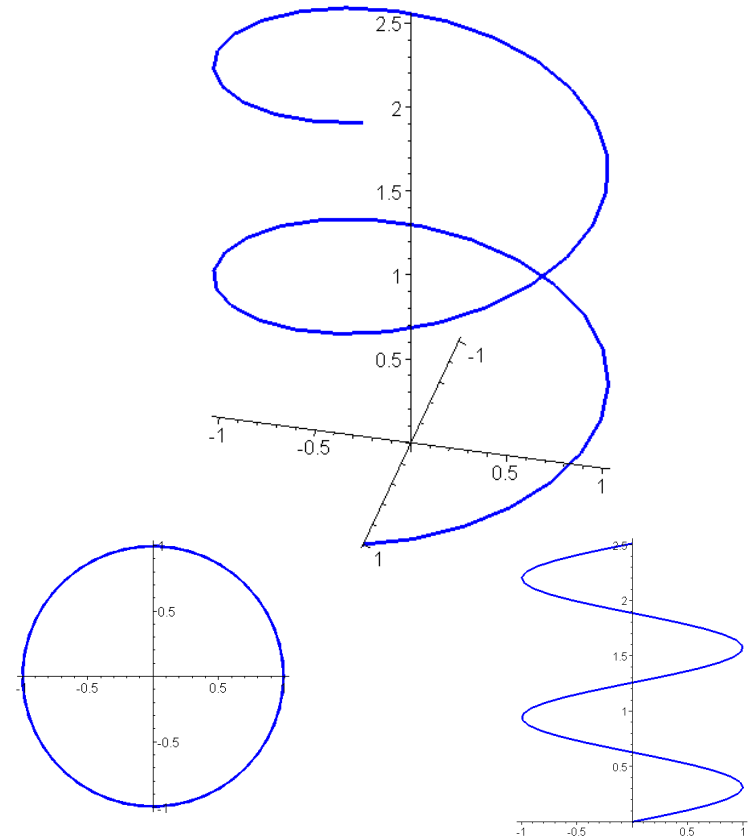
- Ergebnis



Interpolationsansätze: Differentialgeometrie

- Krümmung und Windung
- Für Kurven mit Geschwindigkeit 1 einfacher zu berechnen
- Fundamentalsatz:
 - Wenn Krümmung und Windung bekannt sind, ist die Kurve, bis auf die Lage im Raum vollständig bestimmt

→ Wenige Parameter



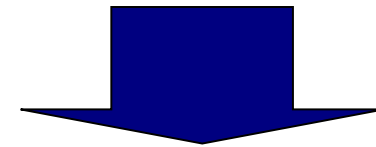
Interpolationsansätze: Schraubenlinie

- Approximation der Bahnkurve durch eine Schraubenlinie mit:
 - Radius R , Frequenz ω und Ganghöhe h
- Optimierung der Parameter durch Minimierung der Fehlerquadrate
- Alternative Methode mit Parametrisierung nach der Bogenlänge

$$x(t) = R \cos(\omega t)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t)$$

$$z(t) = ht$$



$$x(t) = x_1 \cos(x_2 t) + x_3$$

$$y(t) = y_1 \sin(y_2 t) + y_3$$

$$z(t) = z_1 t + z_2$$

Implementation

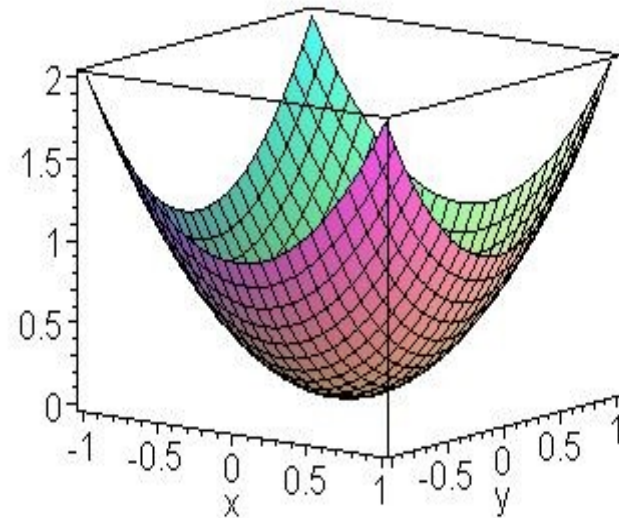
- Methoden zur Minimierung
 1. Maple®: *stats[fit, leastsquare]* optimiert die Parameter → nur linear
 2. Matlab®: *lsqcurvefit* ermöglicht die gewünschte Parametrisierung, aber erfordert Matlab® Lizenz, dadurch nicht flexibel einsetzbar
 3. C++: „Powell's direction set“ Methode und Erweiterung um zweite, „kleine“ Rotation

Implementation

- Abschätzung der „first guess“-Werte:
 - Radius:
 - Groß: Hälfte der Summe aus Maximum und Minimum
 - Klein: Differenz des großen Radius und seinem „first guess“
 - Frequenz:
 - Große Rotation: abhängig von der Anzahl an Nullstellen der ersten Ableitung
 - Kleine Rotation: abhängig von der Anzahl an Nullstellen der Ableitung der Winkelgeschwindigkeit
 - Ganghöhe:
 - Differenz des letzten und ersten z-Wertes geteilt durch die Anzahl der Stützstellen
 - Translation:
 - Mittelwert

Implementation

- Optimierung durch Minimierung der Fehlerquadrate
- Minimierung mit der Methode nach Powell
 - Parameter bilden n-dimensionalen Vektor
 - Parameter dimensionsweise minimieren bis globales Minimum erreicht ist
 - Verbesserung durch Unterteilung
 - Stark von Güte der „first guess“-Werte abhängig



Vorführung der Software

- Ergebnisse werden nun vorgeführt...

Ausblick

- Software ermöglicht wissenschaftliches Arbeiten mit den Videodaten
- Einfache Formelstruktur der Bahnkurve ermöglicht die Erkennung von Zusammenhängen aus Einlassdruck, -volumen und -winkel mit den Parametern
- Mehr Videos wären sinnvoll für statistische Analysen des Programms gewesen

Quellen

- [Wa02] Watt, Allan; 3D-Computergrafik; Addison Wesley 2002.
- [Ku99] Kuipers, Jack B.; Quaternions and Rotation Sequences - a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality; ISBN: 0-691-05872-5; Princeton University Press; Princeton, NJ; 1999.
- [BuHaWi90] Burdick, Howard E.; Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. 4, Vektoranalysis und Funktionentheorie; ISBN: 3-519-02958-8; Teubner; Stuttgart; 1990.
- [Gr94] Gray, Alfred; Differentialgeometrie : klassische Theorie in moderner Darstellung; ISBN: 3-86025-141-4; Spektrum Akademischer Verlag; Heidelberg, u.a.; 1994.
- [ScKö04] Schwarz, Hans-Rudolf, Köckler, Norbert; Numerische Mathematik; ISBN: 3-519-42960-8; Teubner; Stuttgart u.a.; 2004.
- [Bock98] Sebastian Bock BUW; Mathematisch Grundlagen für Bèzier-Kurven im CAD; Weimar 1998.
- [LeTr03] Traversoni, Leonardo; Bubble Motion and Evolution described with Quaternions; Mexico

Quellen

- Weblinks

- <http://geometrie.tuwien.ac.at/Splines>
- http://www.math.uni-wuppertal.de/~heilmann/math3_0405/skript/teil3.pdf (01.02.2005)
- <http://www.msl.uni-bonn.de/vorlesung/vermessung/skripte/dg1.pdf> (05.02.2005)
- http://marvin.sn.schule.de/~mathe/dateien/ma_os/wind sch.pdf (11.02.2005)
- http://www.uni-weimar.de/~schloenv/gasblasen/Rapport_stage2004.pdf (25.02.2005)

Ende

- Fragen?